

FX Volatility and Its Impact on International Trade

An Option-based Approach

Stefan Hubner

Wirtschaftsuniversität Wien - Institut für Außenwirtschaft und Entwicklung

April 15, 2010

- 1 Einleitung**
 - Agenda
 - Fragestellung
- 2 Risikoaversion**
- 3 Export als Real-Option**
 - Zwei-Perioden Modell
 - Mehr-Perioden Modell
- 4 Empirische Analyse**
 - Datenbasis
 - Modellierung
- 5 Ergebnisse**

Wechselkurs

Wir wissen, dass sich ein niedriger Wechselkurs positiv (negativ) auf das Exportvolumen (Importvolumen) auswirkt.

$$\frac{\partial M(Y_d, E)}{\partial E} \leq 0 \leq \frac{\partial X(Y_f, E)}{\partial E}$$

Volatilität

Die Auswirkungen der Volatilität des Wechselkurses sind hingegen schon wesentlich stärker umstritten.

- Wechselkurs als Risikoquelle risikoaverser Händler
- Export als Real-Option bei flexibler Marktstruktur

Produzentenmodell (DeGrauwe, 1987)

- Gewinnoptimierung bezüglich der Exporte
- Annahmen:
 - 1 Linearität der Nutzenfunktion bzgl. Inland und Ausland
 - 2 Konstante relative Risiko-Aversion
- Substitutions- aber auch Einkommenseffekt (Kompensation)

Portfoliotheoretischer Ansatz (Dellas/Zilberfarb, 1993)

- Optimierung von Binnenmarkts- (risikoloses Asset) und Auslandskonsums (riskantes Asset)
- Zwei Perioden (Verteilung, Konsum), Handel auf Vertragsbasis
- Hedgingmöglichkeit in Form von Forward-Märkten
- *Unbiased Markets*: Exposure wird vollständig gehedged
- *Biased Markets*: Einkommens- und Substitutionseffekt

- Flexible Marktstruktur (keine dauerhaften Handelsverträge)
- Entscheidung zum Zeitpunkt $T > t$ ob exportiert/importiert wird
- Keine Downside (wie bspw. Forward-Kontrakt)
- Long Position für Exporteur¹, Short Position für Importeur

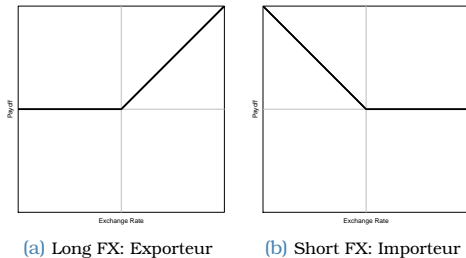


Figure: Flexible Marktstruktur - Export als Option

¹Mengennotation, z.B. EUR/GBP aus Sicht UK, d.h. Aufwertung impliziert höheres Exportvolumen

Definition

- X ist \mathcal{F} -adaptiert: $X(t) \in \mathcal{F}$
- $X_t \in L^1 = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \underline{\mathcal{F}}) \forall t$
- $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \forall 0 \leq t \leq s$

Fordern zusätzliche Eigenschaften: Brown'sche Bewegung

- $X_0 = 0$
- $X_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, t)$
- $X_{t+dt} - X_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, dt)$

Wechselkurse erfüllen diese Eigenschaften

- Zinsparität
- Kaufkraftparität

- Zwei stetig verzinsten kurzfristigen Geldmarktpapieren (Inland, Ausland) mit Zinsdifferenz $\mu := \mu_f - \mu_d$
- Wechselkurs kann modelliert werden als Wert eines *Spread-Trades* zum Zeitpunkt t definiert durch $E_t = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\mu}{n})^{nt} = \exp(\mu t)$
- Infinitesimale Änderung bezüglich der Zeit:
 $dE_t = \mu \exp(\mu t) dt = \mu E_t dt \Leftrightarrow \frac{dE_t}{E_t} = \mu dt$
- Stellt den Trend (*Drift*) dar, aber noch keine Streuung
- Störterm kann als infinitesimale Änderung des X_t -Prozess modelliert werden $\frac{dX_t}{X_t} = \sigma dX_t$
- Wechselkursprozess als Geometrische Brown'sche Bewegung:

$$\frac{dE_t}{E_t} = \mu dt + \sigma dX_t \Leftrightarrow E_t = E_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dX_s$$

Anwendbarkeit des Black-Scholes-Modells aufgrund der Eigenschaften von FX-Prozessen gegeben

Preis einer europäischen Call-Option

$$C_t = E_t \Phi(d_1) - \exp(-r(T-t))K\Phi(d_2)$$
$$d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{E_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Es gilt somit zu beweisen, dass Volatilität den Wert der Option steigert und eine Wertsteigerung eine Erhöhung des Handels mit sich bringt.

Proposition

Sei Export eine Option, so erhöht Volatilität deren Wert: $\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} > 0$

Proof.

$$\begin{aligned}
 v &:= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = E \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - K \exp(-rT) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma} \\
 &= E \underbrace{\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1}}_{\varphi(d_1)} \underbrace{\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}}_{\dots} - K \exp(-rT) \underbrace{\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2}}_{\varphi(d_1 - \sigma\sqrt{T})} \underbrace{\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}}_{\dots} \\
 &= \dots \Rightarrow \underbrace{E}_{>0} \underbrace{\varphi(d_1)}_{>0} \underbrace{\sqrt{T}}_{>0}
 \end{aligned}$$



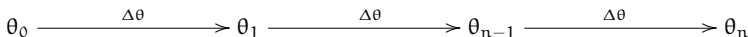
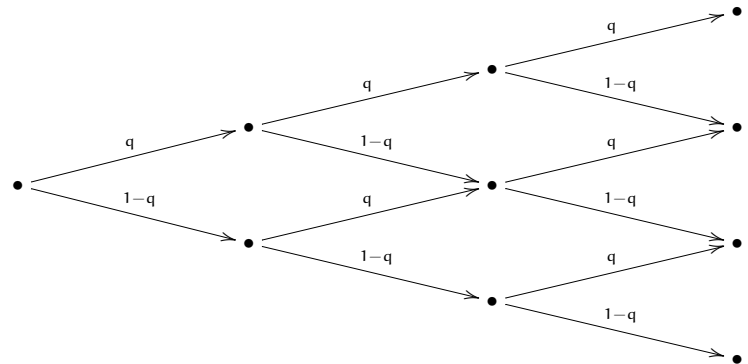
Korollar

Steigt der Wert der Export Option, so impliziert dies eine Zunahme des Handelsvolumens.

$$\forall S_T, K \in \mathbb{R}^+ : \max(S_T - K, 0) \geq S_T - K \text{ wobei } K := S_t + T > 0$$

Proof.

Durch Kontradiktion. Es genügt zu zeigen, dass $\max(S_T - K, 0) < S_T - K$.
Somit folgt $\exists S_T \in \mathbb{R}^+ : S_T - K < 0$. Setze $S_T < K \Rightarrow S_T - K < 0 \Rightarrow$
Widerspruch. Beste Strategie ist stets die Option auszunützen. \square



$$\Delta\theta := \frac{\theta_n - \theta_0}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\theta = 0$$

- Wechselkurs als Ornstein-Uhlenbeck Prozess (stationärer Wiener Prozess)

$$de_t = \mu(e_t - e^*)dt + \sigma dX_t$$

- Dixit-Stiglitz Marktmodell

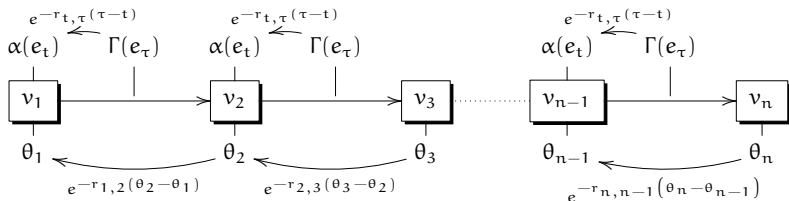
$$x_t = e_t p_t y_t - K(y_t, e_t) \text{ wobei } p_t = p_t(y_t, \bar{y}_t) \text{ und } \bar{y}_t = \bar{y}_t(e_t)$$

- Markteintritts- und Ausstiegskosten $\alpha(e_t)$ und $\Gamma(e_\tau)$
- Kosten und Grenzkosten
Exportvolumen steigend und konvex bzgl. Wechselkurs

$$\frac{\partial x}{\partial e} > 0 \text{ sowie } \frac{\partial^2 x}{\partial e^2} > 0$$

Ein- und Ausstiegskosten steigend und konkav bzgl. Wechselkurs

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e} > 0, \frac{\partial \Gamma}{\partial e} > 0 \text{ sowie } \frac{\partial^2 \alpha}{\partial e^2} < 0, \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial e^2} < 0$$



$$v_{i \in I \setminus \{0\}} = x_t(e_t) - (\alpha(e_t) + \Gamma(e_\tau) \exp(-r_{t \rightarrow \tau}(\tau - t)))$$

$$\text{NPV} = v_1$$

$$+ v_2 \exp(-r_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(\theta_2 - \theta_1))$$

$$+ v_3 \exp(-r_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(\theta_2 - \theta_1)) \exp(-r_{\theta_2 \rightarrow \theta_3}(\theta_3 - \theta_2)) + \dots$$

$$= v_1 + \sum_{t=2}^{\infty} v_t \prod_{j=1}^{t-1} \exp(-r_{\theta_j \rightarrow \theta_{j+1}}(\theta_{j+1} - \theta_j))$$

Eigenschaften Wiener Prozess

- 1 $r_{j,j+1} = r$
- 2 $\theta_t - \theta_{t-1} =: \Delta\theta$
- 3 $v_t = v$

$$\begin{aligned} \text{NPV} &= v \sum_{t=1}^{\infty} \exp(-r(t-1)\Delta\theta) = \frac{v}{1 - \exp(-r(t-1)\Delta\theta)} \\ &= \frac{x_t(e_t) - (\alpha(e_t) + \Gamma(e_t) \exp(-r(\tau-t)))}{1 - \exp(-r(t-1)\Delta\theta)} \end{aligned}$$

- Maximierung des Export-Barwerts durch *Bang-Bang Policy*
- Einstieg wenn Wechselkurs über bestimmten Strike-Level $\alpha > \hat{e}$
- Rückzug aus der Exporttätigkeit bei $z < \hat{e}$
- Keine Kosten: $\alpha = \hat{e} = z \Rightarrow x_t > 0 \Leftrightarrow e_t > \hat{e} \wedge x_t = 0 \Leftrightarrow e_t < \hat{e}$

Proposition

Der Barwert der Exporte steigt mit zunehmender Volatilität σ

Proof.

Sei $S \in \mathbb{R} > 1$ sodass, $(e_{t,h} - e^*) := S(e_{t,l} - e^*) \forall t$

Die erste Ableitung der Barwertgleichung nach S ist gegeben durch

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\partial x(e)}{\partial S} - \left(\frac{\partial \alpha(a)}{\partial S} + \exp(-r(\tau - t)) \frac{\partial \Gamma(z)}{\partial S} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial S} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial x(e)}{\partial S} > \left(\frac{\partial \alpha(a)}{\partial S} + \exp(-r(\tau - t)) \frac{\partial \Gamma(z)}{\partial S} \right)$$

Immer der Fall, da $\frac{\partial^2 x}{\partial e^2} > 0$ und $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial e^2} < 0$, $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial e^2} < 0$ □

Intuitiv: Relative Distanz zu Rentabilitätsgrenzen (a, z) sinkt \rightarrow
Wahrscheinlichkeit in die Gewinnzone zu kommen steigt

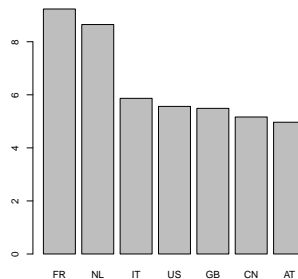
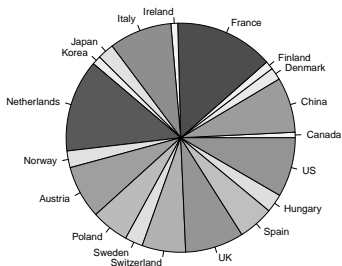
- Theoretisch positive aber auch negative Effekte plausibel
- Risikoaversion
 - Führt zu Reduktion des Handels, da geringerer Nutzen
 - Wenn Handel auf Kontraktbasis: Hedging Kosten reduzieren Nutzen
- Optionstheorie
 - Flexible Marktstruktur
 - Ex-Post Entscheidung ob im Ausland oder am Binnenmarkt verkauft wird
 - Internationale Güter Arbitrage (analog zu PPP-Konzept)
- Jeweils stark von den Modellannahmen abhängig
- Es gilt empirisch festzustellen welcher Effekt überwiegt

Mögliche Ansätze

- Cross-Section Analyse
- Zeitreihenanalyse
- Panel Analyse

Sample

- Bilateraler Handel *Deutschlands* mit jeweiligen Handelspartner
- 19 Länder
(AT, CA, CN, CZ, DK, FN, FR, HU, IE, IT, JP, NL, NO, PO, ES, KR, SE, CH, UK, US)
- 238 monatliche Daten
(FX reduziert, GDP mit Cubic Spline interpoliert)
- Insgesamt 4522 Beobachtungen von Nov 1989 bis Aug 2009
- Quelle: Thompson Financial Datastream



(a) Verteilung des Samples

(b) Top 7 Handelspartner (in % des
Gesamtvolumens)

Figure: Exporte und Importe nach Ländern

Variablen

- Handelsvolumen, Exporte, Importe (in Mio 2009-DEM)
- Nomineller Wechselkurs (täglich)
- Reales Bruttoinlandsprodukt (Quartalsdaten, in Mio 2009-DEM)
- Industrieproduktion (Index, z.T. saisonbereinigt X-11)
- Europäischer Wechselkursmechanismus (Dummy)
- Realisierte FX-Volatilität (monatlich, annualisiert)
- FX-Volatilität als ARCH(1)-Prozess

Werkzeuge

- *The R Project for Statistical Computing*
- PLM Paket (Lineare Panel Modelle)
 - Pooling Modell, Fixed- und Random-Effects Modell
 - Tests wie Hausman-Test, Wooldridge Test, Baltagi and Li Test

Realisierte Volatilität

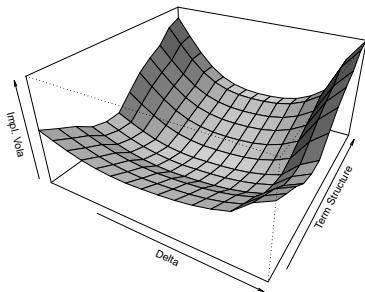
$$\sigma_{ann} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \left(\log \frac{FX_t}{FX_{t-1}} - \mu \right)^2} \sqrt{252}$$

$$\text{wobei } \mu = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log \frac{FX_t}{FX_{t-1}}$$

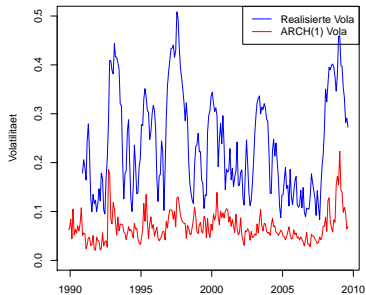
Volatilität als ARCH(s)-Prozess

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i (r_{t-i} - \mathbb{E}[r_{t-i}])^2 + \epsilon_t$$

$$\text{wobei } r_t = \log \frac{FX_t}{FX_{t-252}}$$



(a) Volatility Surface



(b) Volatilität im Zeitverlauf

Figure: Unterschied zwischen realisierter und ARCH(1) Volatilität

1 Orthogonalitätsbedingung

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}_i'(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta})] = \mathbb{E}[\mathbf{X}_i'\mathbf{u}_i] = 0$$

2 Invertierbarkeit von $\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i$

$$\text{rk}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i) = K$$

3 Konstante und unkorrelierte Fehler

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i'] = \sigma^2\mathbf{I}_T$$

- Homoskedastizität

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t] = \text{Var}[\mathbf{u}_t] = \sigma^2 \forall t$$

- Keine serielle Korrelation

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_s] = \text{Cov}[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_s] = 0 \forall s, t : s \neq t$$

Pooling-Modell

- Grundmodell: $\mathbf{y}_i = \alpha + \beta \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i$
- Wenn gemeinsames Intercept $\alpha \Rightarrow$ BLUE
- Schätzer: $\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{y}_i \right)$

Fixed-Effects Modell

- Grundmodell: $\mathbf{y}_i = \alpha_i + \beta \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i$
- Individueller Effekt in den Residuen: $\text{Cov}[(\cdot, \mathbf{x}), \mu_i] \neq 0$ wobei $\mathbf{u}_i = \mu_i + \mathbf{v}_i \Rightarrow$ Orthogonalitätsbedingung verletzt
- Lösung: Durchschnitt über die Zeit bilden (Frisch-Waugh)

$$\mathbf{y}_{it} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_{it} = \beta \left(\mathbf{x}_{it} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{it} \right) + \mathbf{u}_{it} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{u}_{it}$$
- Schätzer: $\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{Q} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{Q} \mathbf{y}_i \right)$

Random-Effects Modell

- Grundmodell: $\mathbf{y}_i = \alpha_i + \beta \mathbf{X}_i + \mathbf{v}_i$

- Residuen weisen Struktur auf

$$\mathbf{v}_{it} = \mu_i + \mathbf{u}_{it}$$

$$\mu_i \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_\mu^2), \mathbf{u}_i \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_u^2)$$

- GLS Schätzer

- 1 Keine Annahme über Eigenschaften der Fehler
- 2 Dafür strikte Exogenität gefordert $\mathbb{E}[\mathbf{X} \otimes \mathbf{u}] = 0$

- Varianz-Kovarianz Matrix $\mathbf{\Omega} := \mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i']$ konstruiert mit

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_{it}^2] = \mathbb{E}[\mu_i^2] + \mathbb{E}[\mathbf{u}_{it}^2] + 2\mathbb{E}[\mu_i \mathbf{u}_{it}] = \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_{it} \mathbf{v}_{is}] = \mathbb{E}[\mu_i^2] + \mathbb{E}[\mu_i \mathbf{u}_{it}] + \mathbb{E}[\mu_i \mathbf{u}_{is}] + \mathbb{E}[\mathbf{u}_{it} \mathbf{u}_{is}] = \mathbb{E}[\mu_i^2] = \sigma_\mu^2$$

- Schätzer: $\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{y}_i \right)$

- Exporte und Importe weisen einen MA-Prozess auf (nicht saisonbereinigt)
- Wooldridge's Test auf individuelle und zeitliche Effekte jeweils signifikant \Rightarrow Pooling Modell biased, stattdessen Fixed- bzw. Random-Effect Modell notwendig
- Nicht alle Modelle mit Random-Schätzer zu schätzen (Verletzung der strikten Exogenität)
- Modelle sehr robust im Zeitverlauf

Oneway (individual) effect Pooling Model

Call:

```
plm(formula = formula.abs, data = trade, model = "pooling")
```

Balanced Panel: n=19, T=238, N=4522

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)	
(Intercept)	2.7864e+03	6.9855e+01	39.8876	< 2.2e-16	***
gdp	-1.7670e-08	1.3329e-09	-13.2568	< 2.2e-16	***
fx	1.9899e+00	1.8865e-01	10.5486	< 2.2e-16	***
rvola	-3.7525e+03	7.0335e+02	-5.3351	1.001e-07	***
eerm	1.3222e+03	1.0431e+02	12.6753	< 2.2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares: 3.7735e+10

Residual Sum of Squares: 3.2567e+10

F-statistic: 179.199 on 4 and 4517 DF, p-value: < 2.22e-16

Oneway (individual) effect Random Effect Model
(Swamy-Arora's transformation)

Call:

```
plm(formula = formula.dl_ma, data = attachResidual(plag(trade,
12), model.dl$resid), effect = "individual", model = "random
```

Balanced Panel: n=19, T=214, N=4066

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)	
(Intercept)	5.7841e+03	1.8771e+02	30.8136	< 2.2e-16	***
gdp	-7.1972e-09	2.0282e-09	-3.5486	0.0003917	***
lag(rvola, 3)	-3.8507e+03	3.5612e+02	-10.8127	< 2.2e-16	***
lag(rvola, 6)	-4.6844e+03	3.4694e+02	-13.5019	< 2.2e-16	***
lag(rvola, 12)	-5.2388e+03	3.5935e+02	-14.5784	< 2.2e-16	***
fx	2.4886e+00	6.3313e-01	3.9307	8.612e-05	***
lag(fx, 12)	4.2355e+00	6.1682e-01	6.8666	7.575e-12	***
lag(resids, 1)	9.5521e-01	5.4333e-03	175.8064	< 2.2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares: 3.587e+10

Residual Sum of Squares: 3909100000

F-statistic: 4739.76 on 7 and 4058 DF, p-value: < 2.22e-16

Twoways effects Within Model

Call:

```
plm(formula = formula.dl_ma, data = attachResidual(plag(trade,
  24), model.dl$resid), effect = "twoways", model = "within")
```

Balanced Panel: n=19, T=190, N=3610

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)	
log(indprod)	0.3634353	0.0137738	26.3860	< 2.2e-16	***
lag(rvola, 6)	-0.0821175	0.0431769	-1.9019	0.0572710	.
lag(rvola, 12)	-0.3530981	0.0456062	-7.7423	1.279e-14	***
lag(rvola, 18)	-0.1523960	0.0443749	-3.4343	0.0006012	***
lag(rvola, 24)	-0.1788506	0.0431754	-4.1424	3.520e-05	***
log(fx)	-0.2653978	0.0271356	-9.7804	< 2.2e-16	***
log(lag(fx, 12))	0.5681445	0.0240749	23.5990	< 2.2e-16	***
eerm	-0.0161609	0.0078602	-2.0560	0.0398561	*
lag(resids, 1)	0.8342127	0.0096674	86.2912	< 2.2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares: 128.09

Residual Sum of Squares: 33.829

F-statistic: 1050.42 on 9 and 3393 DF, p-value: < 2.22e-16

Oneway (individual) effect Within Model

Call:

```
plm(formula = formula.proactive, data = trade, effect = "individual",
     model = "within")
```

Balanced Panel: n=19, T=226, N=4294

Coefficients :

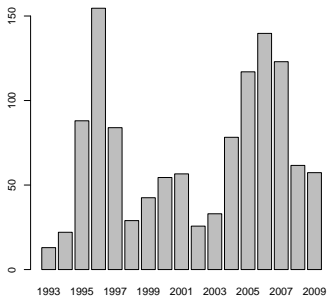
	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)	
log(indprod)	1.190620	0.025298	47.0646	< 2.2e-16	***
evola	-0.130470	0.046703	-2.7936	0.005235	**
log(fx)	0.528013	0.035518	14.8660	< 2.2e-16	***
eerm	0.220318	0.018858	11.6833	< 2.2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

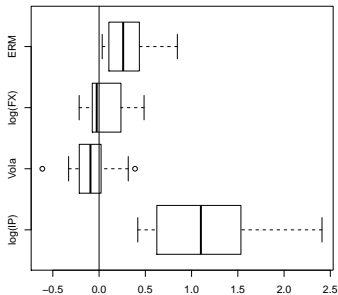
Total Sum of Squares: 930.38

Residual Sum of Squares: 409.17

F-statistic: 1360.15 on 4 and 4271 DF, p-value: < 2.22e-16



(a) F Statistik



(b) Koeffizienten

Figure: Zusammenfassung einer Rolling Regression (4 Jahre)

- Stark signifikante Modelle mit hohem Erklärungsgehalt
- Sämtliche Koeffizienten plausibel
- Einfluss der Volatilität eindeutig negativ
- Hypothese des positiven Einflusses zu verwerfen
- Offensichtlich überwiegt die Risikoaversion der Händler